Jozef Kiseľák

Prednáška 1

Podmienky

- ☞ Účasť na prednáškach je nepovinná - zvážiť
- ☞ Účasť na cvičeniach je povinná - viď podmienky na získanie ”zápočtu”
- ☞ Jedinečná možnosť pýtať sa!!!
- ☞ Podmienky na skúšku (upresnené neskôr)

Sylabus

(I) Systémy diferenciálnych rovníc (DR vyšších rádov)

(i) Existencia a jednoznačnosť a predĺžiteľnosť riešenia

(ii) Rovnice s konštantnými koeficientami

(iii) Prvé integrály diferenciálnych rovníc

(iv) Teória stability riešení diferenciálnych rovníc

(II) Základné parciálne diferenciálne rovnice (ako dodatok)

(III) Priestory funkcií

(i) Priestory so skalárnym súčinom (Hilbertove priestory)

(ii) Operátory

(iii) Úvod do variačného počtu

(IV) Fourierove rady

(i) Fourierove rady v Hilbertovom priestore

(ii) Trigonometrické rady

(V) Fourierov integrál, Fourierova transformácia

1.1. Diferenciálne rovnice vyšších rádov

V tejto kapitole sa budeme zaoberať obyčajnými diferenciálnymi rovnicami $n-$tého rádu, kde $n \geq 1$.

Definícia 1.1.1.

Nech $\Phi(t, z_0, z_1, \ldots, z_n)$ je reálna funkcia $(n+2)$ premenných, ktorá vzhľadom k premennej z_n nie je konštantná, definovaná na množine $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1}$. Potom výraz

$$\Phi(x, \underbrace{y, y', \ldots, y^{(n)}}_{\text{neznáme}}) = 0 \tag{1.1}$$

nezávislá premenná

závislá premenná a jej derivácie

nazývame obyčajnou diferenciálnou rovnicou $n-$tého rádu. Jej (klasickým) riešením v Ω na intervale $I \subset \mathbb{R}$ nazývame funkciu $y \in C^n(I)$, pre ktorú platí rovnosť (1.1) a pre každé $t \in I$ je $(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)}(t)) \in \Omega$.

Poznámka 1.1.2.

Všimnime si, že rovnica (1.1) je vo všeobecnosti v implicitnom tvare.
Ak intervalu I patrí krajný koncový bod, uvažujeme príslušnú jednostrannú deriváciu.
Všimnime si, že vzťah $y' = (y \circ y)(t)$ nespĺňa našu definíciu diferenciálnej rovnice, ide o nelokálny typ operátora - kompozíciu, ale derivácia je lokálny typ operácie a tak je to pre nás neprípustné.

Motiváciou na študovanie diferenciálnych rovníc je množstvo aplikácii vo fyzike (a iných vedách). Ukážeme si motivačný príklad.

Príklad 1.1.3 (Motivácia I. - matematické kyvadlo)**.**

Uvažujme teleso tvaru gule, hmotnosti m, zavesené na vlákne dĺžky L a hmotnosti M (vlákno sa nedeformuje). Predpokladajme, že vlákno sa môže otáčať o akýkoľvek uhol. Ak na teleso nepôsobí žiadna vonkajšia sila, tak zostane vo zvislej polohe (ľubovoľne dlho) - rovnovážny stav. Ak vychýlime vlákno z tejto polohy o uhol P_0, bude teleso vykonávať kmitavý pohyb. Ešte si to zidealizujeme (prejdeme od fyzikálneho kyvadla k matematickému) tým, že predpokladáme pohyb vo vákuu (bez trenia), teleso je sústredené do bodu (HB) a $M = 0$. Na odvodenie rovnice potrebujeme 3. pohybové zákony (PZ). Viď obrázky 1.1(a),1.1(b).

- Sila F, ktorou držíme HB v začiatočnej polohe P_0 má podľa 3. PZ veľkosť mg. Pohyb však spôsobuje iba tangenciálna zložka tejto sily. Takže platí

$$|F_1| = |F| \sin P(t) = mg \sin P(t).$$

- Uvažujme teraz dve blízke polohy kyvadla A, B v časoch t a $t + \Delta t$, ktorým zodpovedajú uhly $P(t)$ a $P(t + \Delta t) = P(t) + \Delta P(t)$. Ak je Δt dostatočne malé, potom uhol OAB je blízky $\pi/2$ a dĺžka oblúka 5.0pt$\overset{\frown}{\mathrm{AB}} =: \Delta s$ je približne dĺžka úsečky $\overline{AB}$. Dostávame teda $\frac{\Delta s}{L} = \sin \Delta P \approx \Delta P - \frac{(\Delta P)^3}{3!} + \frac{(\Delta P)^5}{5!} - \dots$. Keďže aj ΔP je dostatočne malé, potom je $\sin \Delta P \approx \Delta P$ a teda

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = L\frac{\Delta P}{\Delta t}.$$

Preto pre $\Delta t \to 0$, potom $s' = LP'$ ($s'' = LP''$) (vzťah oblúkovej a uhlovej rýchlosti).

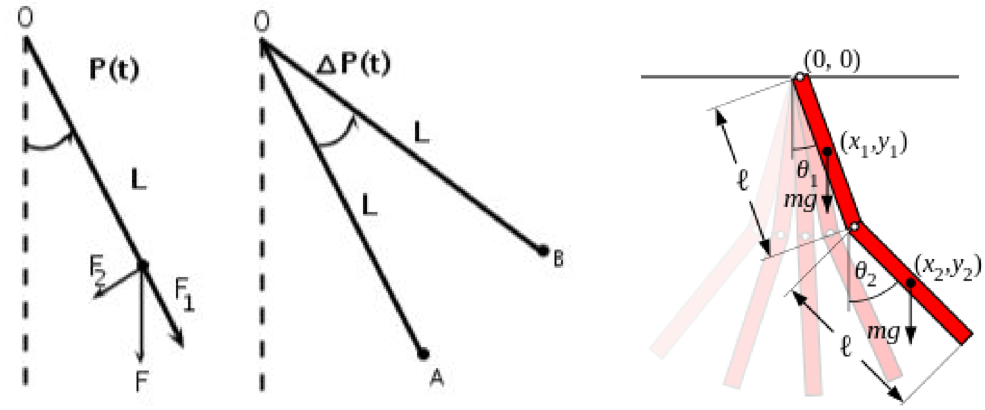
- Z 2. PZ a predchádzajúcich rovností máme rovnosť

$$m\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = mL\frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}t^2}mg \sin P.$$

Pohybová rovnica matematického kyvadla má teda tvar

$$\frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}t^2} + k^2 \sin P = 0, \tag{1.2}$$

kde $k = \sqrt{g/L}$.



(a) Sily pôsobiace na hmotný bod m.
(b) Vychýlený pohyb hmotného bodu m.
(c) Dvojité kyvadlo.

Obr. 1.1: Matematické kyvadlá.

Príklad 1.1.4 (Motivácia II. - dvojité matematické kyvadlo)**.**

Uvažujme teraz dvojité matematické kyvadlo zjednodušeného typu. Ramená majú rovnakú dĺžku ℓ a HB rovnakú hmotnosť m, viď obrázok 1.1(c). Ich pohybové rovnice sú reprezentované systémom diferenciálnych rovníc, ktorých Lagrangián ma tvar

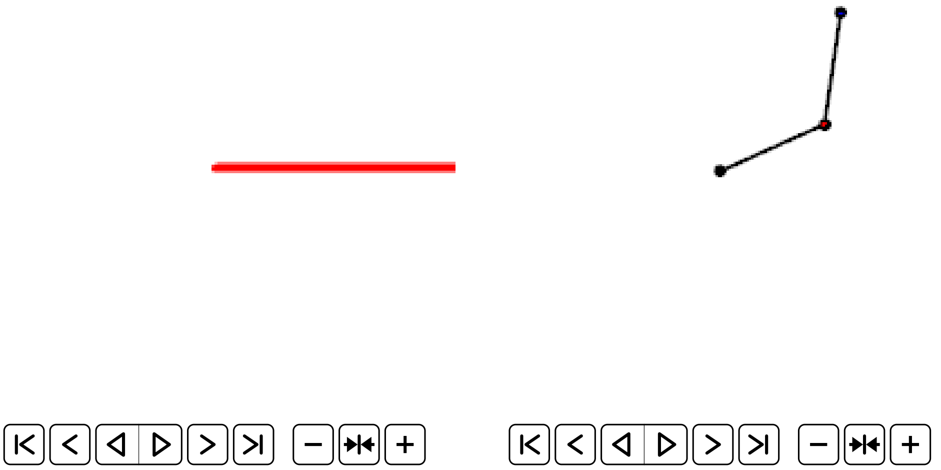
$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) + \frac{1}{2}I\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2\right) - mg\left(y_1 + y_2\right), \tag{1.3}$$

kde $I = \frac{1}{12}m\ell^2$ je moment zotrvačnosti ťažiska ramena (stred ramena) a

$$x_1 = \frac{\ell}{2}\sin\theta_1, \; y_1 = -\frac{\ell}{2}\cos\theta_1,$$

$$x_2 = \ell\left(\sin\theta_1 + \frac{1}{2}\sin\theta_2\right), \; y_2 = -\ell\left(\cos\theta_1 + \frac{1}{2}\cos\theta_2\right),$$

sú ťažiská ramien.



Obr. 1.2: Trajektórie dvojitého kyvadla.

Príklad 1.1.5 (Motivácia III. - LCR obvod - vybíjanie kondenzátora)**.**

LCR obvod je uzavretá elektronická sieť, pozostávajúca z 3 uzlov A_1, A_2, A_3. Medzi A_1 a A_2 je odpor, medzi A_3 a A_2 je kondenzátor a medzi A_1 a A_3 je cievka. Zo zákonov pre prvky obvodu (Ohmov, o indukčnosti, o kapacite) dostávame

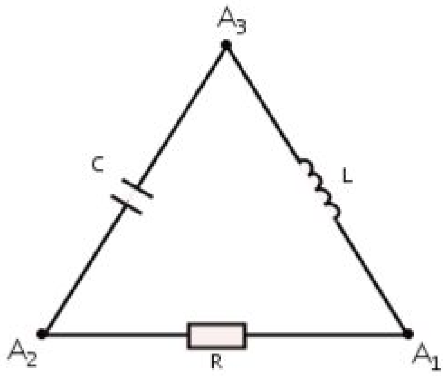
$$v_{12} = jR, \quad C\frac{\mathrm{d}v_{23}}{\mathrm{d}t} = j, \quad v_{31} = L\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}t},$$

kde j je intenzita prúdu v obvode, v_{ij} je rozdiel napätí na uzloch A_i, A_j, L je indukčnosť, C je kapacita a R je odpor. Z 1. Kirchhoffovho zákona máme $v_{12} + v_{23} + v_{31} = 0$. Ak si označíme $v := v_{23}$, tak dostaneme systém lineárnych rovníc

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{j}{C}, \quad \frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{L}v - \frac{R}{L}j.$$

Ak namiesto odporu dáme taký prvok, na ktorom bude napätie závislé na intenzite podľa nejakej funkcie t.j. $v_{12} = f(j)$, dostaneme nelineárny systém

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{j}{C}, \quad \frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{L}v - \frac{1}{L}f(j).$$



Obr. 1.3: LCR obvod.

Poznámka 1.1.6.

Ak y je riešením (1.1) na I, potom to automaticky znamená, že pre každé $t \in I$ je vektor $(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t))$ v definičnom obore funkcie Φ.

1.2. Špeciálne tvary diferenciálnych rovníc

0.

Bernoulliho rovnica má tvar

$$y' + p(x)\,y = g(x)\,y^{\alpha}, \tag{B}$$

pričom $p, g \in C(a,b), g \not\equiv 0$ a $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

Motivácia: pre $y \in C^1(a,b)$ platí $(y^m)' = p(y)^{m-1}y'$ pre "rozumné" m. Prenásobením rovnice (B) výrazom $(1-\alpha)y^{-\alpha}$ dostaneme rovnicu

$$(1-\alpha)y^{-\alpha}y' + (1-\alpha)\,p(x)\,y^{1-\alpha} = (1-\alpha)g(x).$$

Uvažujeme substitúciu $z = y^{1-\alpha}$, odkiaľ $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$. Obdržíme tak lineárnu rovnicu 1.

rádu

$$z' + (1-\alpha)p(x)\,z = (1-\alpha)g(x) \tag{BL}$$

Pre $\alpha \in \{0, 1\}$ je to rovnica lineárna.

1.

Rovnice v tvare

$$y^{(n)} = f(t),$$

majú riešenia v tvare

$$y(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t-t_0)^i}{i!} y_i + \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^{t} (t-\tau)^{n-1} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad t \in I,$$

ktoré možno nájsť postupným integrovaním.

2.

Rovnice v tvare

$$y^{(n)} = f\left(t, y^{(n-1)}\right),$$

možno upraviť pomocou substitúcie $z = y^{(n-1)}$ na tvar

$$z' = f(t, z).$$

Ak nájdeme riešenie $z(t)$ tejto rovnice, potom riešenie pôvodnej rovnice nájdeme opäť postupným integrovaním.

3.

Rovnice v tvare

$$y^{(n)} = f\left(y^{(n-2)}\right),$$

možno upraviť pomocou substitúcie $z = y^{(n-2)}$ na tvar

$$z'' = f(z).$$

4.

Rovnice v tvare

$$\Phi\left(t, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}\right) = 0,\ 1 \le k \le n$$

možno upraviť pomocou substitúcie $z = y^{(k)}$ na tvar

$$\Phi\left(t, z, z', \dots, z^{(n-k)}\right) = 0.$$

Znížili sme teda rád rovnice.

5.

ak $\Phi(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, tak $y'(t) = z$, kde y bude nová nezávislá premenná zníži rád rovnice o 1

napr. v prípade $n = 2$ máme $y'' = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} z$, teda $\Phi(y, z, z'z) = 0$

6.

Ak je rovnica $\Phi(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ exaktná, ak $\Phi(t, y^{(j)}, \dots, y^{(n)}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t, y^{(j)}, \dots, y^{(n-1)}) = 0$ a Φ je tzv. prvý integrál (podobne druhý ...)

Ak nie je je rovnica $\Phi(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ exaktná, hľadáme integračný faktor $\mu(t, y, y', \dots, y^{n-1})$.

Napr. $z'' = f(z)$ riešime vynásobením oboch strán faktorom $2z'$ (predpokladáme teda, že $z' \neq 0$). Dostaneme (po úprave) $\left[(z')^2\right]' = 2f(z)z'$ a teda $(z')^2 = 2F(z) + k$, kde F je primitívna k f. Ak nájdeme riešenie $z(t)$ tejto rovnice, potom riešenie pôvodnej rovnice nájdeme opäť postupným integrovaním.

7.

Nech $y_1 \neq 0$ je riešením DR

$$y'' + p_1(t)y' + p_2(t)y = 0 \tag{1.4}$$

a z rieši $z' + (2y_1'/y_1 + p_1)z = 0$. Potom funkcie

$$y_1(t),\ y_2(t) = y_1(t)\int z(t)\,\mathrm{d}t$$

tvoria FSR rovnice (1.4) na I.

7.

Transformácia závislej premennej (1.4). Použijeme substitúciu $y(t) = \psi(t)\,v(t)$, kde v je nová závislá premenná a ψ budeme hľadať tak, aby sme v rovnici

$$\left(p_1(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi(t) + p_2(t)\psi(t) + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\psi(t)\right)v(t) + \underbrace{\left(p_1(t)\psi(t) + 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi(t)\right)}_{=0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(t) + \psi(t)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}v(t) = 0$$

vynulovali člen 1. rádu, teda máme $\psi(t) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int p_1(t)\,\mathrm{d}t}$. Ak budeme schopní nájsť bázu rovnice, tak nájdeme aj bázu tej pôvodnej.

Transformácia nezávislej premennej rovnice (1.4). Použijeme substitúciu $z = u(t)$, $\tilde{y}(z) = y(u^{-1}(z))$, kde z je nová nezávislá premenná a u budeme hľadať tak, aby sme v rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2\tilde{y}}{\mathrm{d}z^2} + \underbrace{\frac{\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} + p_1(t)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}}{(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t})^2}}_{=0}\frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}z} + \frac{p_2(t)}{(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t})^2}\tilde{y} = 0$$

vynulovali člen 1. rádu, teda máme $z(t) = \int \mathrm{e}^{-\int p(t)\,\mathrm{d}t}$. Ak budeme schopní nájsť bázu rovnice, tak nájdeme aj bázu tej pôvodnej.

Poznámka 1.2.1.

Samozrejme v oboch prípadoch je možné položiť koeficienty rovné aj nenulovým konštantám.

Už sme používali nelineárne transformácie na dosiahnutie cieľa, napr. pri Bernoulliho rovnici. Teoreticky je táto metóda použiteľná vždy, avšak je ťažké určiť akú transformáciu je potrebné použiť.

Problém 1.2.2.

Ukážte,že rovnica $(xy' - y)^2 = 2xy(1 + y'^2)$ má v polárnych súradniciach tvar

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi} = \frac{1 - \sin(2\phi)}{\sin(2\phi)}r^2.$$

Problém 1.2.3.

Ukážte,že rovnica $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ má v súradniciach $u=x+y, v=x-y, w=xy-z$ tvar

$$1=2\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}.$$

1.3. Sústavy obyčajných diferenciálnych rovníc

Uvažujme sústavu diferenciálnych rovníc pre neznáme funkcie $\mathbf{y}=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ jednej reálnej premennej v tzv. normálnom tvare (derivácie príslušného rádu sa dajú explicitne vyjadriť)

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(t,y_1,y_2,\dots,y_n),\\ y_2' &= f_2(t,y_1,y_2,\dots,y_n),\\ &\vdots\\ y_n' &= f_n(t,y_1,y_2,\dots,y_n), \end{aligned} \tag{1.5}$$

kde $\mathbf{f}=(f_1,f_2,\dots,f_n)^T$ sú reálne zadané funkcie definované a spojité na oblasti množine $\Omega = I\times U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ a znak $'$ znamená deriváciu podľa premennej t. Zavedením stĺpcových vektorov možno (1.5) stručne zapísať aj v tvare

$$\mathbf{y}'=\mathbf{f}(t,\mathbf{y}). \tag{1.6}$$

V literatúre sa používa niekoľko pojmov, ktoré sú v nejakom zmysle synonymom pojmu riešenia (1.6). Vyjasníme si to v nasledujúcej definícii.

Definícia 1.3.1.

(Klasickým) riešením sústavy (1.6) v Ω na intervale $I \subset \mathbb{R}$ rozumieme zobrazenie $\mathbf{y} \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, pre ktoré platí rovnosť (1.6) a pre $t \in I$ je $(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \in \Omega$. Množinu U nazývame fázový priestor a množinu (obor hodnôt riešenia) $\mathbf{y}(I)$ fázová krivka (trajektória) - stav systému. Graf riešenia, t.j. gr $\mathbf{x} = \{(\mathrm{t}, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \times \mathbb{R},\ \mathrm{t} \in \mathrm{I}\}$ nazývame integrálna krivka. Množinu $O(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{x} = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0),\ t \in I\}$ nazývame orbita predchádzajúca $\mathbf{x}_0$, pričom $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.

Fázová krivka je projekciou integrálnej krivky do fázového priestoru pozdĺž "časovej" osi.

Príklad 1.3.2.

Uvažujme systém

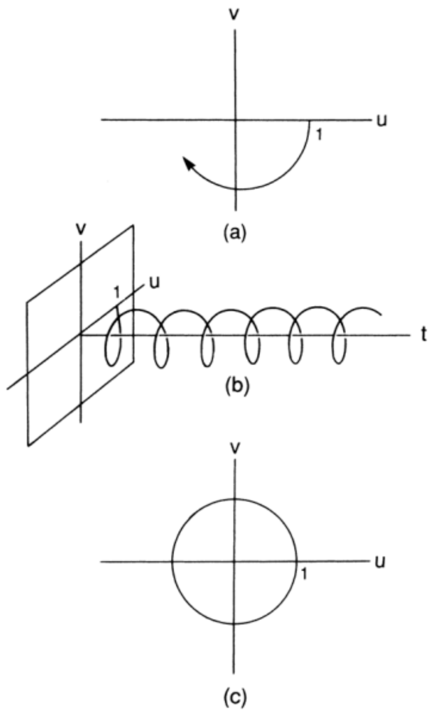
$$\dot{u} = v,$$

$$\dot{v} = -u.$$

Riešenie prechádzajúce bodom $(u_0, v_0) = (1, 0)$ v čase $t_0 = 0$ má tvar $(u(t) = \cos t, v(t) = -\sin t)$, $t \in \mathbb{R}$. Integrálna krivka predchádzajúca bodom $(1, 0)$ v $t = 0$ je množina $\left\{(u, v, t) \in \mathbb{R}^3 : u = \cos t, v = \sin t,\ t \in \mathbb{R}\right\}$ a orbitou je kružnica $x^2 + y^2 = 1$. Viď obrázok 1.4(a). Zrejme pre každé $T \in I$ je $O(\mathbf{x}(T; t_0, \mathbf{x}_0)) = O(\mathbf{x}_0)$

Riešeniu systému (1.6) zodpovedá krivka v priestore $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Odtiaľ, tak ako v prípade DR prvého rádu, vyplýva nasledujúca úvaha. Ak v každom bode $(t, \mathbf{y}) \in \Omega$ je skonštruovaný vektor $\mathbf{T}$ so súradnicami $\mathbf{T}(t, \mathbf{y}) = (1, f_1(t, \mathbf{y}), \dots, f_n(t, \mathbf{y}))$, potom hovoríme, že je dané smerové pole systému (1.6) na množine Ω. V ľubovoľnom bode každej integrálnej krivky systému (1.6) je smer dotyčnice totožný so smerom zodpovedajúceho vektora smerového poľa, skonštruovaného v tomto bode. Geometrická reprezentácia stavov systému vo fázovom priestore sa volá fázový portrét (súbor fázových kriviek). Ten fyzikálne vyjadruje toto : ak sa t mení, bod $\mathbf{y}(t)$ sa pohybuje vo fázovom priestore tak, že jeho okamžitá rýchlosť sa rovná hodnote vektorového poľa $\mathbf{f}$ v tomto bode.

Teraz si vyjasníme vzťah medzi sústavou n rovníc prvého rádu a jednou rovnicou rádu n.



(a)

Obr. 1.4: (a) Fázová krivka, (b) Integrálna krivka, (c) Orbita

Nech y je riešením rovnice

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right), \tag{1.7}$$

potom ak označíme $y_1 = y,\ y_2 = y', \dots, y_n = y^{(n-1)}$, bude funkcia $\mathbf{y}$ riešením sústavy

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3, \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= f(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \tag{1.8}$$

a naopak. Tento prevod má význam pri študovaní vlastností jednej či druhej rovnice. Zrejme však rovnica v tvare sústavy je zložitejší objekt a nie každý systém možno previesť na rovnicu vyššieho rádu.

Príklad 1.3.3.

Majme napríklad sústavu

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1^2, \\ y_2' &= \sqrt{y_2}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Zrejme máme nezávislé rovnice, ktoré nemožno prepojiť.

Avšak, za istých predpokladov je to možné. Derivujme prvú rovnicu z (1.6) podľa t a za y_j', $j = 1, 2, \dots, n$, dosadíme ich vyjadrenie dané rovnicami (1.6), dostaneme tak

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial y_j} y_j' = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial y_j} f_j := F_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Toto opakujeme $(n-1)-$krát a tým dostaneme

$$y_1^{(n)} := F_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Ak z rovníc

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_1'' &= F_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ &\vdots \\ y_1^{(n-1)} &= F_{n-1}(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{aligned} \tag{1.10}$$

môžeme vyjadriť $y_2, y_3, \dots, y_n$ ako funkcie premenných $t, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}$, t.j.

$$y_j = \phi_j\left(t, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}\right), \quad j = 2, 3, \dots, n,$$

čo vieme (aspoň lokálne) v okolí bodu $\left(t, \mathbf{y}^0\right)$, v ktorom je $\det \tilde{\mathbf{F}}' \neq 0$ (podmienka regularity), kde $\tilde{\mathbf{F}} = (f_1, F_2, \ldots, F_{n-1})$ a derivácia je podľa vektora $(y_2, y_3, \ldots, y_n)$, môžeme dosadením do rovnice

$$y_1^{(n)} = F_n(t, y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

dostať pre y_1 rovnicu

$$y_1^{(n)} = F_n\left(t, y_1, \phi_2\left(t, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}\right), \ldots, \phi_n\left(t, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}\right)\right),$$

čo je hľadaná rovnica vyššieho rádu. Dá sa ukázať, že tento vzťah je v tomto prípade obojstranný.

Definícia 1.3.4.

Cauchyho začiatočná úloha:

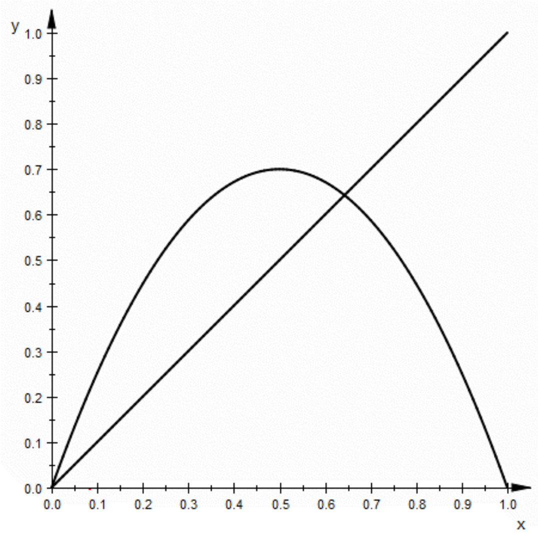
$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^0 \end{cases} \tag{1.11}$$

Nasledujúca veta, ako aj veta 1.3.8 majú tzv. lokálny charakter. Teda existencia, resp. jednoznačnosť riešenia je garantovaná iba na nejakom okolí bodu $t = t_0$.

Veta 1.3.5 (Peanova o existencii)**.**

Nech $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je oblasť a $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazenie. Potom pre každý bod $\left(t_0, \mathbf{y}^0\right) \in \Omega$ existuje otvorený interval $I \subset \mathbb{R}$ obsahujúci t_0, na ktorom je definované riešenie $\mathbf{y} : I \to \mathbb{R}^n$ začiatočnej úlohy (1.11).

Carathéodoryho existenčná veta je zovšeobecnením Peanovej vety a pokrýva širšiu množinu funkcií, pre ktoré je existencia zaručená. Táto veta však hovorí o riešení diferenciálneho systému v inom zmysle (diferencovateľnosť s.v.) .



Obr. 1.5: Iterácia $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ s $r \in (1, 1 + \sqrt{6})$ a počiatočnou hodnotou $0 < x_1 < 0.1$ konvergujúca k pevnému bodu $x^* : \quad f(x^*) = x^*$.

Definícia 1.3.6.

Hovoríme, že zobrazenie $\mathbf{f} : I \times U = \Omega \to \mathbb{R}^n$ je lokálne lipschitzovské na Ω vzhľadom na $\mathbf{y}$, ak je splnená podmienka: $\forall \left(t_0, \mathbf{y}^0\right) \in \Omega$ existujú čísla $a > 0, b > 0, L > 0$ také, že $G = \left\{(t, \mathbf{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| < a, \left\|\mathbf{y} - \mathbf{y}^0\right\| < b\right\} \subset \Omega$, a

$$\left\|f\left(t, \mathbf{y}^1\right) - f\left(t, \mathbf{y}^2\right)\right\| \le L \left\|\mathbf{y}^1 - \mathbf{y}^2\right\|,$$

pre $\forall \left(t, \mathbf{y}^1\right), \left(t, \mathbf{y}^2\right) \in G$.

Veta 1.3.7 (Banachova o pevnom bode)**.**

Nech (X, d) je úplný metrický priestor a $F : X \to X$ je kontraktívne zobrazenie (s konštantou L). Potom má zobrazenie F práve jeden pevný bod $u \in X$ $(F(u) = u)$. Navyše, pre každé $x \in X$ platí $F^{[n]}(x) \to u$ pre $n \to \infty$, pričom pre rýchlosť konvergencie platí $d\left(u, F^{[n]}(x)\right) \le L^n \cdot d(u, x)$.

Veta 1.3.8 (Picardova-Lindelöfova o jednoznačnosti).

Nech $I \times U = \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je oblasť a $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je spojité a lokálne lipschitzovské zobrazenie na Ω vzhľadom na $\mathbf{y}$. Potom pre každý bod $\left(t_0, \mathbf{y}^0\right) \in \Omega$ existuje číslo $\delta > 0$ také, že na intervale $I_\delta = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ je definované práve jedno riešenie začiatočnej úlohy (1.11).

Niekedy sa táto veta označuje aj Cauchyho-Lipschitzova-Picardova veta. Pozor, podmienka v predchádzajúcej vete nie je nutnou podmienkou ako ukazuje aj nasledujúci príklad.

Príklad 1.3.9.

Dá sa ukázať, že problém $y' = f(y),\ y(0) = \alpha,\ \alpha \in [0, 1)$, kde

$$f(y) = \begin{cases} y \ln \frac{1}{y}, & 0 < y < 1 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

má práve jedno riešenie $y(t) = \alpha^{e^{-t}}$ napriek tomu, že pravá strana nie je lokálne lipschitzovská vzhľadom na y na okolí (0,0).

Príklad 1.3.10 (nejednoznačnosť).

Problém $y' = y^{2/3},\ y(0) = 0$ má nekonečne veľa riešení. Nájdite ich !

Problém 1.3.11.

Dokážte, že Cauchyho úloha $y' = 1 + y^{2/3},\ y(0) = 0$ má jediné riešenie, a to aj napriek tomu, že nespĺňa podmienku (lokálna Lipschitzovskosť) vo vete 1.3.8.

Definícia 1.3.12.

Riešenie systému (1.6) sa nazýva globálne, ak je definované pre všetky $t \in \mathbb{R}$.

Nasledujúca veta hovorí o predĺžiteľnosti riešenia (postačujúca podmienka) na celú os $\mathbb{R}$, t.j. nenastáva tzv. blow-up riešenia. Všimnite si, že globálna Lipschitzovskosť pravej strany (vzhľadom na premennú $\mathbf{y}$) na rovnice 1.6 automaticky implikuje predĺžiteľnosť riešenia na príslušnej množine (t.j. na množine, kde je pravá strana spojitá vzhľadom na premennú t).

Veta 1.3.13 (Veta o globálnom riešení).

Nech $\mathbf{f} \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ a pre všetky $(t, \mathbf{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ platí

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| \leq F(t)\, \omega(\|\mathbf{y}\|),$$

kde $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ je spojitá funkcia a $\omega : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ je spojitá, pre ktorú naviac platí

$$\int_r^\infty \frac{\mathrm{d}s}{\omega(s)} = \infty, \quad r > 0.$$

Potom pre všetky $(t_0, \mathbf{y}^0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ existuje globálne riešenie začiatočnej úlohy (1.11).

Poznámka 1.3.14.

Ak $\omega(s) = s, F(s) = L$ pre všetky $s \in [0, \infty), L > 0$, potom prvá podmienka vo vete znamená, že $\mathbf{f}$ je globálne lipschitzovské zobrazenie (vzhľadom na $\mathbf{y}$) a druhá podmienka je splnená automaticky.

Dôsledok 1.3.15 (O globálnej existencii).

Nech $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ a pre každé $T > 0$ existujú $M(T), L(T)$ tak, že

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| \leq M(T) + L(T)\|\mathbf{y}\|, \quad (t, \mathbf{y}) \in [-T, T] \times \mathbb{R}^n,$$

potom všetky riešenia problému (1.11) sú globálne.

Problém 1.3.16.

Zamyslite sa nad tým, či môže odhad v predchádzajúcej vete vyzerať takto

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| \leq M(T) + L(T)\|\mathbf{y}\|^\alpha, \quad \alpha > 1.$$